SERVICE NEWSLETTER

Ausgabe: 06 / 2004

Einführung in die Mechanik
Teil 1: Kinematik

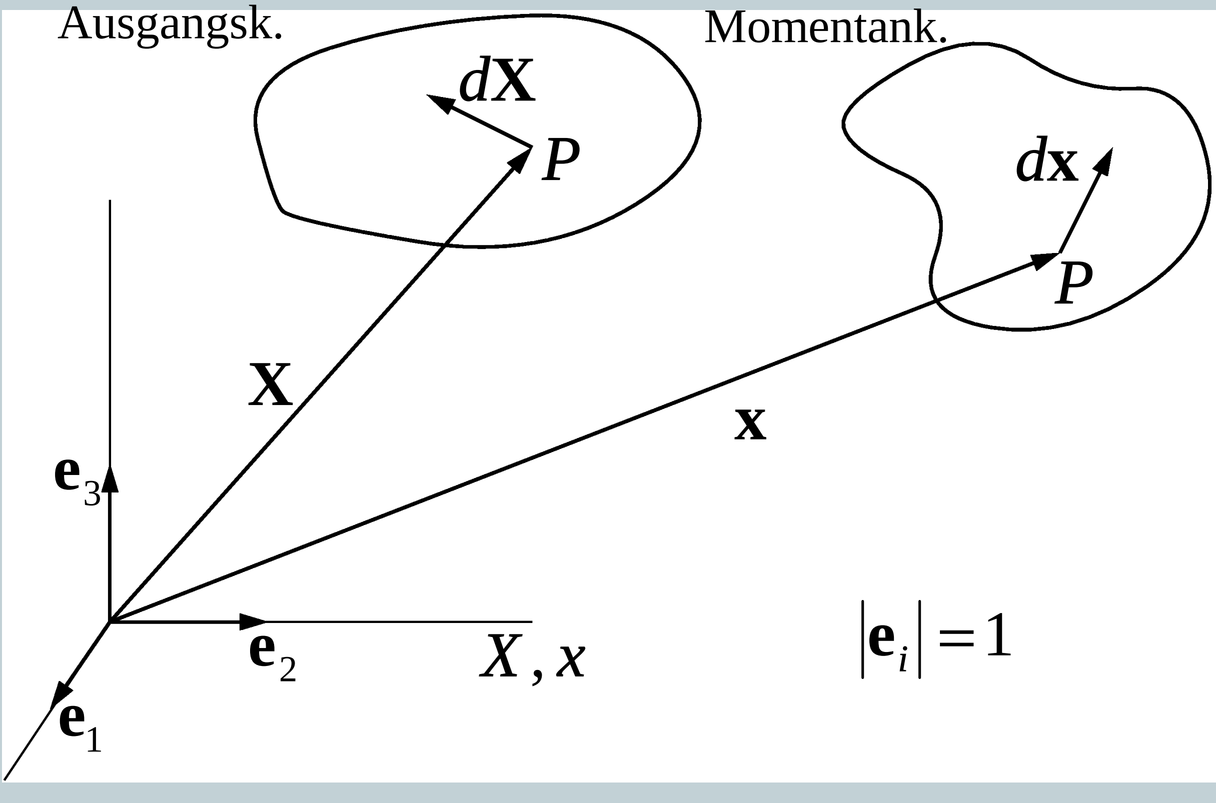
Beginnend mit dem heutigen 1. Teil wird in diesem und in folgenden Ausgaben des Newsletters die Reihe „Einführung in die Mechanik“ gestartet. Sie soll die Grundlagen für die FEM-Methode ins Gedächtnis rufen und bietet eine Vertiefung dieser Grundlagen.

Der erste Teil (und die folgenden) behandelt die **Kinematik**. Was bedeutet nun der Begriff Kinematik? Hierzu eine Definition:

> Die **Kinematik** beschreibt die Bewegung und Deformation eines Körper **ohne** Berücksichtigung der Ursache hierfür.

D.h. nachfolgend sind Größen wie Spannung und Kraft **ohne** Bedeutung. Die hier vorgestellte Kinematik ist die Grundlage für die Beschreibung der Deformation und somit auch z.B. für die Definition von Verzerrungen.

Zur Beschreibung der Bewegung betrachten wir zwei Zustände: Die sog. Ausgangskonfiguration (Beginn der Bewegung) und die Momentan-konfiguration:



Einführung in die Mechanik
Teil 1: Kinematik

Ausgabe: 06 / 2004

Der Punkt P in der Ausgangskonfiguration hat die kartesischen Koordinaten X_1,X_2,X_3. In der Momentankonfiguration, also zu einem bestimmten Zeitpunkt während der Bewegung, die Koordinaten x_1,x_2,x_3. Stellt man dies in Vektorschreibweise dar, ergibt sich mit der kartesischen Basis $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{oder} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

Für weitere, spätere Betrachtungen „haftet“ dem Punkt P noch ein kleiner (differentieller) Vektor an dessen Bewegung ebenfalls unter „Beobachtung steht“. Für ihn lautet die Darstellung:

$$d\mathbf{X} = dX_1\mathbf{e}_1 + dX_2\mathbf{e}_2 + dX_3\mathbf{e}_3 \quad \text{oder} \quad d\mathbf{X} = (dX_1, dX_2, dX_3)$$

$$d\mathbf{x} = dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2 + dx_3\mathbf{e}_3 \quad \text{oder} \quad d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

Wie wird nun aber die Bewegung beschrieben? Dies erfolgt über die sog. *Geschehensfunktion*: Die Momentankoordinaten x_i sind Funktionen der Ausgangskoordinaten X_i und der Zeit t:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ \mathrm{f}_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ \mathrm{f}_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{pmatrix}$$

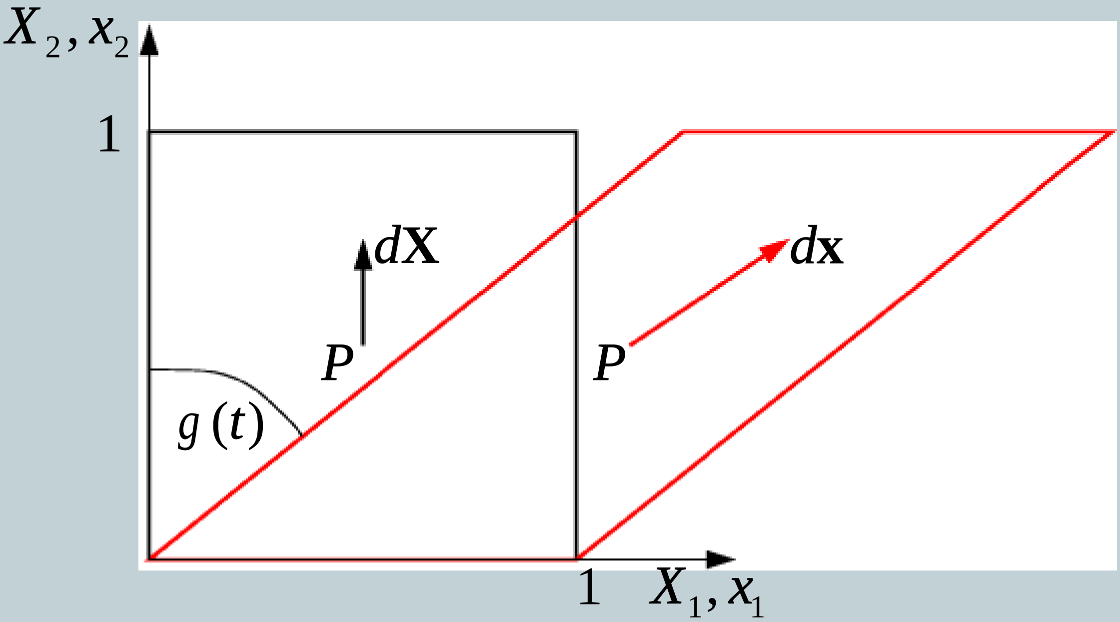
Die Funktion **f muss** eindeutig umkehrbar sein! Man beachte, dass die Momentankoordinaten x_i im allgemeinen von allen 3 Ausgangskoordinaten X_i abhängen. Für die Umkehrung gilt damit:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_1^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathrm{f}_2^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathrm{f}_3^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix}$$

Einführung in die Mechanik
Teil 1: Kinematik

Ausgabe: 06 / 2004

Das bisher gezeigte soll nun anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht werden. Wir verwenden hierfür einen 2-D „simple shear“ Test bei *konstanter* Dicke (keine Deformation in X_3-Richtung):



Die Ausgangskonfiguration ist ein Quadrat der Kantenlänge 1. Die Scherung wird über den Scherwinkel γ(t) beschrieben. Damit gilt für die Bewegung:

$$x_1 = X_1 + [\tan g(t)] X_2 \approx X_1 + g(t) X_2$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

Die Approximation in der ersten Zeile gilt für kleine Scherwinkel, die wir hier annehmen wollen. Für die Umkehrfunktion erhält man auf einfache Weise:

$$X_1 = x_1 - g(t) x_2$$

$$X_2 = x_2$$

$$X_3 = x_3$$

Wir werden auf diese Beziehungen im Laufe der Reihe noch öfter zurück-kommen. Die weitere Auswertung des Beispiels erfolgt dann im 2. Teil.