

Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (2)

Ausgabe: 09 / 2004

In diesem Teil der Reihe wollen wir anhand eines Zahlenbeispiels den Deformationsgradienten als zentrale Größe zur Beschreibung der Deformation in der Kinematik einführen.

Warum das Ganze ???

Wir behandeln diese Thematik im Newsletter aus folgendem Grund:

Nichtlineare Berechnungen gehören mit ANSYS heutzutage fast schon zur Standard-Berechnungsaufgabe. Die wenigsten Anwender wissen jedoch, was in ANSYS oder Workbench überhaupt „hinter den Kulissen“ abläuft.

Der Anwender, den das interessiert, wird in dieser Reihe hinreichend informiert, auch wenn die Beiträge eher „von theoretischer Natur“ erscheinen.

Insofern hier ein Beispiel wie man den Deformationsgradienten **F** ganz leicht berechnen kann. Wie bereits erwähnt, ist dieser die zentrale Größe in der Kinematik, um Deformation zu beschreiben. Insofern tritt er in abgewandelter Form immer wieder in den Algorithmen auf, gerade auch bei der Beschreibung von Materialgesetzen.

Gesucht wird eine Größe **F (Deformationsgradient)** der einen Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Lage **X** und der endgültigen Lage **x** herstellt.

Sind die deformierte Lage der Elemente (**x**) und die Ausgangslage (**X**) bekannt, kann der Deformationsgradient **F** über die **Geschehensfunktion** **$x=f(X,t)$** bestimmt werden.

Damit läßt sich dann die Deformation beliebiger Linienvektoren (Linien in der Struktur) beschreiben.

Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (3)

Ausgabe: 09 / 2004

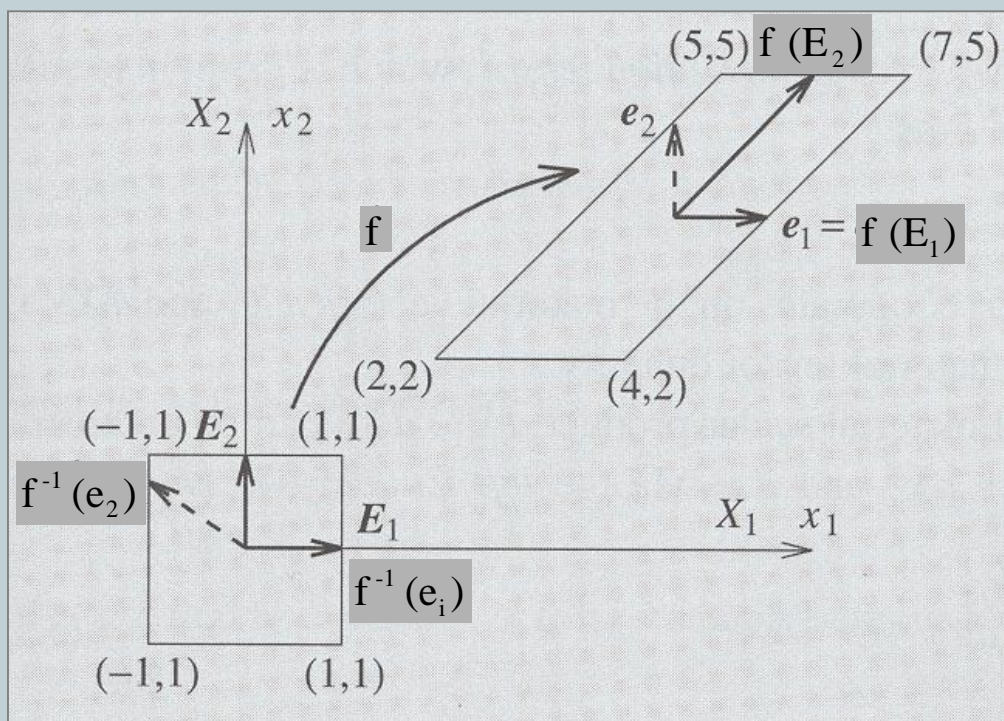
Zum Beispiel:

Gegeben ist die folgende Deformation. So ein Zusammenhang kann in der FEM immer angegeben werden, da die verschobene Lage ja immer gerade aus der FEM berechnet wird. Die neue Koordinate x_1 ist über durch eine Funktion abhängig von den ursprünglichen Koordinaten X_1 und X_2 .

$$x_1 = \frac{1}{4}(18 + 4X_1 + 6X_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14 + 6X_2)$$

Anschaulich sieht diese Deformation für ein Element so aus:



Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (2)

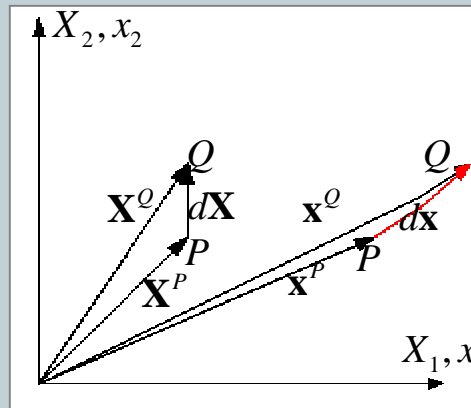
Ausgabe: 09 / 2004

Zunächst werden noch einmal die Linienelemente $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$ betrachtet:

Der Abstand der Punkte P und Q in der Ausgangs- und Momentankonfiguration sei infinitesimal klein. Damit gilt zunächst:

$$\mathbf{X}^Q - \mathbf{X}^P = d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P = d\mathbf{x}$$



Der Ortsvektor \mathbf{x}^Q der Endlage wird nun durch eine Taylorreihenentwicklung am Punkt P beschrieben (Abbruch der Reihe nach dem linearen Term):

$$\mathbf{x}^Q = \mathbf{x}^P + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^Q \\ x_2^Q \\ x_3^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^P \\ x_2^P \\ x_3^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Linienelement in der Endlage und dem Linienelement in der Ursprungslage:

$$\Rightarrow d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (2)

Ausgabe: 09 / 2004

Damit ist der **Deformationsgradient \mathbf{F}** gefunden. Die Matrix \mathbf{F} ist *fundamental* in der Kontinuumsmechanik und dient als Grundlage für die weitere Ableitung von Deformationsgrößen wie z.B. Verzerrungen.

Bereits im letzten Artikel fanden wir die Darstellung der **Geschehensfunktion \mathbf{f}** . Die Momentankoordinaten x_i sind Funktionen der Ausgangskoordinaten X_i und der Zeit t :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ f_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ f_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{pmatrix}$$

Des Weiteren stellten wir fest, dass die Funktion \mathbf{f} **eindeutig umkehrbar sein muss**.

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \\ f_2^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \\ f_3^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix}$$

\mathbf{F} ergibt sich also durch partielle Ableitung der Geschehensfunktion \mathbf{f} .

Stellt man sich die Frage, welche Konfiguration ein (deformiertes) Linienelement der Momentankonfiguration in der (undeformierten, spannungsfreien) Ausgangskonfiguration eingenommen hat, erhält man das inverse Problem. Mit der bereits aufgestellten Umkehrfunktion \mathbf{f}^{-1} lässt sich dies berechnen:

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} dx_3 \end{pmatrix}$$

Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (2)

Ausgabe: 09 / 2004

$$\Rightarrow d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

Es lässt sich zeigen, dass gilt:

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Beziehungen für \mathbf{F} und \mathbf{F}^{-1} sollen nun auf unser Zahlenbeispiel angewendet werden.

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (3)

Ausgabe: 09 / 2004

Durch partielle Ableitung erhält man:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jetzt, da \mathbf{F} bekannt ist, kann man auch sagen, wie sich Linienvektoren etwa von der unverformten in die verformte Lage transformieren:

$$\phi_*[\mathbf{E}_1] = \mathbf{F} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \phi_*[\mathbf{E}_2] = \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Aus der Umkehrbarkeit der Abbildung kann man sogar sagen, wie ein deformierter Linienvektor in der Ausgangskonfiguration aussah.

$$\phi_*^{-1}[\mathbf{e}_1] = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \phi_*^{-1}[\mathbf{e}_2] = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

In diesem Beispiel wurden Einheitsvektoren transformiert. Dies ist deshalb möglich da es sich um eine **homogene** Deformation handelt: Der Deformationsgradient ist unabhängig von Ort und Zeit.

Und noch einmal der Hinweis, woher man denn überhaupt die oben angegebenen Funktionen für x_1 und x_2 bekommt: Diese sind in jedem Iterationsschritt in der nichtlinearen FEM durch ANSYS bekannt. Die aktuelle Lage der Knoten wird über das Gleichgewicht bestimmt. Kennt man den Ort der Knoten kann über die bekannten Verschiebungsansätze im Element der Deformationsgradient berechnet werden.

Daraus ergeben sich dann zum Beispiel die Dehnungen und Spannungen, eben das was Sie sicher schon einmal mit PLESOL,EPEL,X oder PLESOL,S,X in ANSYS sich angesehen haben.

Einführung in die Mechanik Teil 2: Kinematik (3)

Ausgabe: 09 / 2004

Dieses Zahlenbeispiel stammt übrigens aus dem Buch:

„Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis“ von
Javier Bonet und Richard D. Wood, erschienen bei
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Wen es interessiert, kann hier sicher weiterlesen, wir werden uns in dieser Reihe auch daran orientieren.

Nachdem nun die wichtigste Größe in der Kontinuumsmechanik abgeleitet und in einem Beispiel angewendet wurde, werden wir uns im nächsten Teil näher mit der Deformation (Längenänderung) eines Linienelementes beschäftigen. Ebenso gilt es die Frage zu klären, wie sich Flächen- und Volumeninhalte ändern. Dies wird später bei der Definition von Spannungen und Materialgesetzen eine Rolle spielen.