

Einführung in die Mechanik Teil 5: Verzerrungstensoren (2)

Ausgabe: 05 / 2005

Im letzten Teil der Serie haben wir bereits ein Verzerrungsmaß, den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor, kennen gelernt und begonnen ihn zu interpretieren. Ein Resultat war die Erkenntnis, dass er im Grenzfall kleiner Verzerrungen in die bekannten Ingenieurdehnungen übergeht. Bevor wir uns nun die Gleitungen, d.h. den Fall $d\mathbf{X}_1 \neq d\mathbf{X}_2$ ansehen, noch eine Interpretation der Hauptdiagonalelemente $E_{ii}; i=1,2,3$. Aus

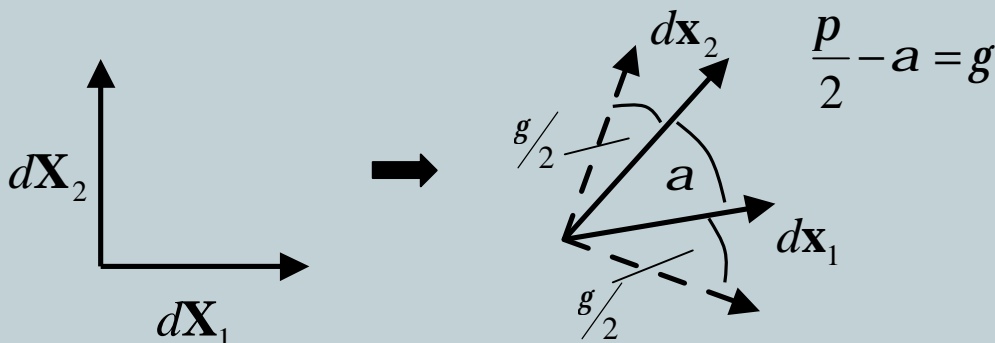
$$\frac{1}{2}(I^2 - 1) = \mathbf{N} \bullet \mathbf{E} \mathbf{N}$$

folgt für ein Linienelement $\mathbf{N}=[1,0,0]$ in x_1 -Richtung (und analog für x_2, x_3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I^2 - 1) = E_{11} &\Rightarrow I = \frac{Dl + l_0}{l_0} = 1 + e = \sqrt{2E_{11} + 1} \\ &\Rightarrow E_{11} = e + \frac{1}{2}e^2 \end{aligned}$$

ε sind hier wiederum die Ingenieurdehnungen. Das Ergebnis zeigt zweierlei: Zum Einen sind die Hauptdiagonalelemente direkt mit der Streckung in die jeweilige Koordinatenrichtung verknüpft und zum Anderen zeigt das Ergebnis den nichtlinearen Zusammenhang mit den Ingenieurdehnungen. Nun soll noch folgender Fall untersucht werden:

2. $d\mathbf{X}_1 \neq d\mathbf{X}_2$ und $d\mathbf{X}_1 \perp d\mathbf{X}_2$



Einführung in die Mechanik Teil 5: Verzerrungstensoren (2)

Ausgabe: 05 / 2005

Mit der Definition der Green-Lagrangeschen Verzerrungen erhält man für diesen Fall [$\cos(d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2) = 0$!]:

$$\frac{\left| \underbrace{d\mathbf{x}_1}_{I_1} \right| \left| \underbrace{d\mathbf{x}_2}_{I_2} \right|}{\left| \underbrace{d\mathbf{X}_1}_{I_1} \right| \left| \underbrace{d\mathbf{X}_2}_{I_2} \right|} \cos(\underbrace{d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2}_a) = l_1 l_2 \cos a = l_1 l_2 \sin g = \mathbf{N}_1 \bullet 2\mathbf{E}\mathbf{N}_2$$

und damit für $\mathbf{N}_1 = [1, 0, 0]$ und $\mathbf{N}_2 = [0, 1, 0]$ unter Berücksichtigung der gerade abgeleiteten Ergebnisse für λ_1, λ_2 :

$$\sin g = \frac{2E_{12}}{\sqrt{2E_{11} + 1} \sqrt{2E_{22} + 1}}$$

Wie man der Gleichung entnimmt stellen damit die Nebendiagonalelemente (hier: E_{12}) ein Maß für die Gleitungen dar. Betrachtet man auch hier den Fall kleiner Verzerrungen (Gleitungen) erhält man

$$\sin g \approx g \approx 2E_{12} \quad \Rightarrow \quad E_{12} \approx \frac{g}{2}$$

was wiederum den Ingenieur-Gleitungen entspricht.

Ein weiterer Verzerrungstensor ist der sog. „Almansische Verzerrungstensor“. Er ist in seiner Definition dem Greenschen sehr ähnlich. Der Unterschied besteht in seiner Bezugskonfiguration:

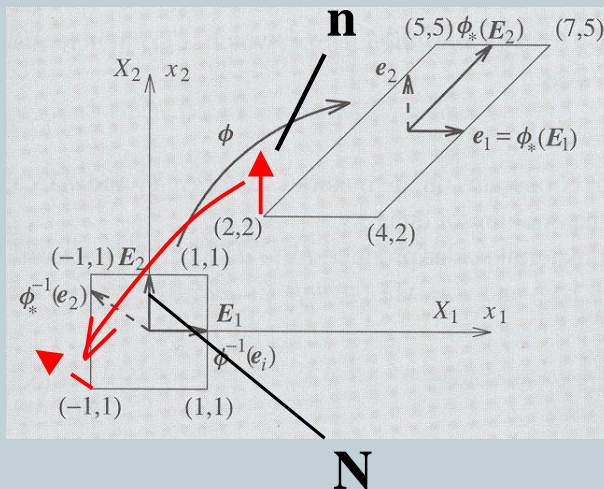
$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 \bullet d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \bullet d\mathbf{X}_2 &:= d\mathbf{x}_1 \bullet 2\mathbf{a}d\mathbf{x}_2 \\ \Rightarrow \quad \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) \end{aligned}$$

Einführung in die Mechanik Teil 5: Verzerrungstensoren (2)

Ausgabe: 05 / 2005

Man erkennt, dass dieser nun auf die Momentankonfiguration bezogen ist: Für die Berechnung der Differenz wird mit den Linienelementen der Momentankonfiguration multipliziert. Seine geometrische Interpretation folgt direkt der des Greenschen Verzerrungstensors.

Wir wollen alle bisher abgeleiteten Größen noch einmal anhand des Beispiels aus Teil 4 verifizieren. Bereits berechnet war der Greensche Verzerrungstensor:



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} \right) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} \mathbf{N} = \frac{7}{4} \quad ; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für den Almansischen Verzerrungstensor wird noch der linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{b} bzw. \mathbf{b}^{-1} benötigt:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 3,25 & 2,25 & 0 \\ 2,25 & 2,25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1,44 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einführung in die Mechanik Teil 5: Verzerrungstensoren (2)

Ausgabe: 05 / 2005

Damit erhält man den Almansischen Verzerrungstensor zu

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zunächst bleibt festzuhalten, dass die beiden Verzerrungstensoren **nicht** identisch sind! Welche Verzerrung wird nun durch den Almansischen Verzerrungstensor gemessen? Dafür betrachten wir noch einmal die Definition für den Fall $d\mathbf{x}_1 = d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \bullet d\mathbf{X} := d\mathbf{x} \bullet 2\mathbf{a}d\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{ds^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{I^2} \right) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \bullet \mathbf{a} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{a}\mathbf{n}$$

Er misst also die Verzerrung bezüglich der Momentankonfiguration (Bezug ist die aktuelle Länge des Linienelementes). Beispiel: Wir verwenden das **rot** eingezeichnete Linienelement der Momentankonfiguration $\mathbf{n} = [0, 1, 0]$. Wie sah es **vor** der Deformation aus? Dies lässt sich einfach beantworten:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,67 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,67 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht in etwa dem **rot gestrichelt** eingezeichneten Vektor. Der Betrag des Ausgangsvektors ist $|d\mathbf{X}| = 1,2$. Damit erfährt dieses Element eine Stauchung (von 1,2 auf 1), die Verzerrung sollte also negativ sein! Setzt man \mathbf{n} in obige Gleichung ein erhält man als Verzerrung für dieses Element den Wert $a_{22} = -0,22$, was den Erwartungen entspricht.

Einführung in die Mechanik Teil 5: Verzerrungstensoren (2)

Ausgabe: 05 / 2005

Nun soll noch eine letzte Frage beantwortet werden: Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Greenschen und Almansischen Verzerrungen? Um das zu untersuchen berechnen wir:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{a} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 1,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Offensichtlich stellt obige Beziehung die Transformation der Almansischen Verzerrungen in die Greenschen dar. Das kann auch allgemein gezeigt werden:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{a} \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} = \frac{1}{2} (\underbrace{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}_{\mathbf{C}} - \underbrace{\mathbf{F}^T \mathbf{E}^{-T}}_{\mathbf{1}} \underbrace{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}}_{\mathbf{1}}) = \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{a}$$

Die letzte Gleichung stellt die Umkehrung obiger Transformation dar. Wir werden später sehen, dass für die Spannungen ähnliche Beziehungen existieren.

Um den letzten und vielleicht im Zusammenhang mit ANSYS wichtigsten Verzerrungstensor, den wahren bzw. logarithmischen Verzerrungstensor (auch Henckyscher Verzerrungstensor genannt) vorzustellen, ist noch einiges an Vorarbeit zu leisten. Insbesondere wird eine Hauptachsendarstellung von Tensoren 2.Stufe (Matrizen) benötigt. Dies wird im nächsten Teil behandelt.

(AF)