SERVICE NEWSLETTER

Ausgabe: 03 / 2006

Ergebnisinterpretation bei Modalanalysen

Problemstellung:

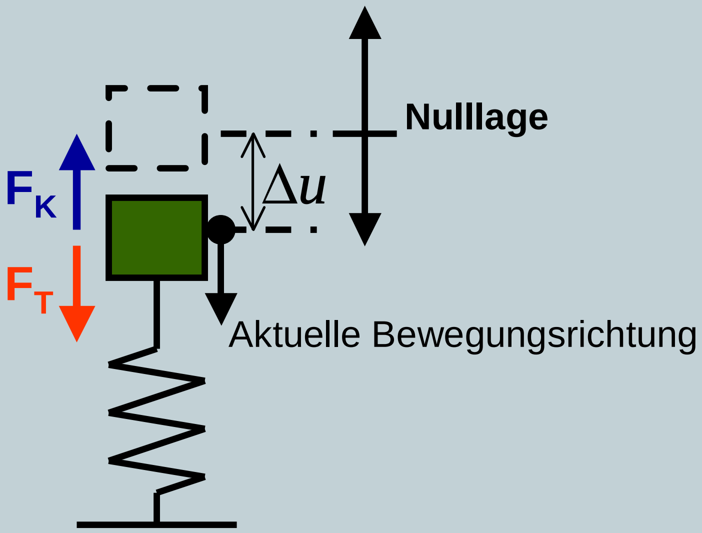
Bei Modalanalysen werden die Eigenfrequenzen und die Eigenformen berechnet. Es können aber auch die Verformungen und sogar Spannungen zu den einzelnen Moden ausgewertet werden. Hier stellen sich nun folgende Fragen:

Welche Aussagekraft haben die einzelnen Ergebnisse?

Welche Ergebnisse sind vergleichbar untereinander?

Theoretischer Hintergrund:

Beginnen wir einfach mit einem Einmassenschwinger.
Wir stellen eine Masse auf eine Feder und lassen das System schwingen.



Die Masse schwingt gerade nach unten. Zum aktuellen Zeitpunkt hat sie den Weg Δu zurückgelegt. Die Feder wird gestaucht und bremst die Masse ab.

Nun tragen wir alle Kräfte an die an der Masse angreifen. Die Trägheitskräfte werden entgegen der Beschleunigung angetragen (Prinzip von d'Alembert). Die Beschleunigung ergibt sich aus der zweimaligen Ableitung des Weges.

$$F_T = m \cdot a = m \cdot \ddot{u}$$

Die Federkraft wirkt dieser entgegen:

$$F_K = K \cdot \Delta u$$

Ergebnisinterpretation bei Modalanalysen

Theoretischer Hintergrund:

Da dies alles Kräfte sind, die an dem System angreifen, müssen sie im Gleichgewicht stehen.

Dynamisches Kräftegleichgewicht für ungedämpfte Systeme:

$$F_K = F_T$$

$$K \cdot \Delta u = m \cdot \ddot{u}$$

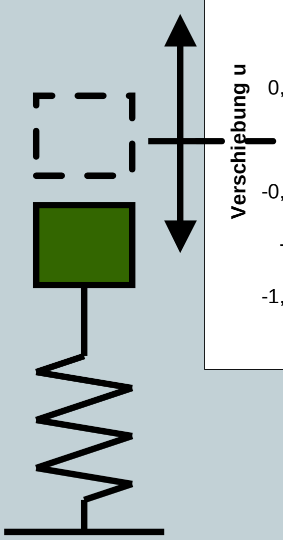
$$-m \cdot \ddot{u} + K \cdot \Delta u = 0$$

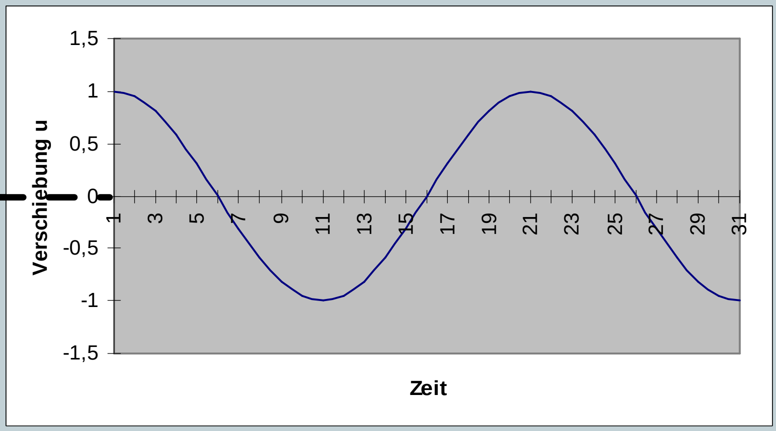
Eine nach der finiten Elemente Methode diskretisierte reale Struktur liefert ein analoges Gleichungssystem:

$$\boxed{\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = 0}$$

Darin besteht der Vektor u aus den Verschiebungen der einzelnen Knoten.

Als Lösungsansatz für dieses Gleichungssystem und für die schwingende Verschiebung u bietet sich eine Cosinus Funktion an.



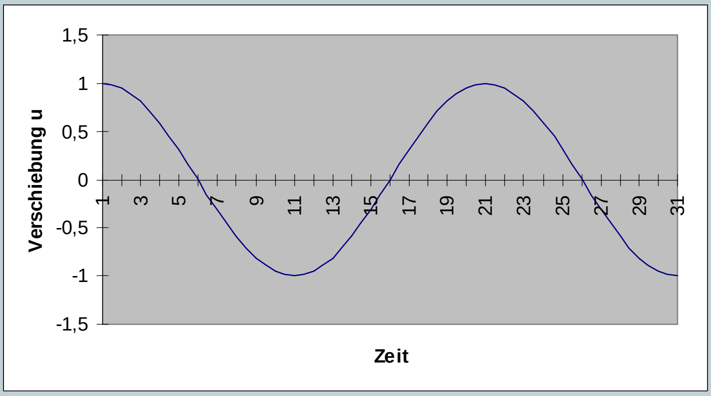


$$\boxed{\underline{u} = \underline{\Phi}_i \cdot \cos(w_i t)}$$

Ergebnisinterpretation bei Modalanalysen

Theoretischer Hintergrund:

$$\boxed{\underline{u} = \underline{\Phi}_i \cdot \cos(w_i t)}$$



$\underline{\Phi}_i$	i-ter Eigenvektor
w_i	i-te Eigenkreisfrequenz
t	Zeit

Für jeden Knoten ergibt sich die Verschiebung als Kosinus Funktion multipliziert mit einem Skalierungsfaktor. Diese Skalierungsfaktoren für das gesamte Modell bilden den Eigenvektor $\underline{\Phi}$ zur i-ten Eigenkreisfrequenz $\underline{\omega}$.

Diesen Ansatz setzen wir nun in unser Gleichungssystem ein:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = 0 \quad \longleftarrow \quad \underline{u} = \underline{\Phi}_i \cdot \cos(w_i t)$$

$$\boxed{\left[\underline{M} \cdot (-w_i^2) + \underline{K}\right] \cdot \underline{\Phi}_i = 0}$$

Dieses Gleichungssystem wird erfüllt mit: $\underline{\Phi}_i = \underline{0}$

Das ist die die sog. triviale Lösung. Damit die Lösung nichttrivial ist, also Zahlen ≠0 enthält, muss die Determinante des Vorfaktor 0 werden:

$$\boxed{\left|\underline{M} \cdot (-w_i^2) + \underline{K}\right| = 0}$$

Die Determinante kann bestimmt werden und führt auf ein Gleichungssystem für die Eigenkreisfrequenzen $\underline{\omega}$. Aus den Eigenkreisfrequenzen erhält man dann einfach die Eigenfrequenzen f nach:

$$\boxed{f_i = \frac{w_i}{2p}}$$

CADFEM
Ausgabe: 03 / 2006

Ergebnisinterpretation bei Modalanalysen

Theoretischer Hintergrund:

Zurück zu unserem Gleichungssystem. Darin ist nun der erste Faktor für verschiedene $\underline{\omega}$ bekannt. Man kann also den jeweiligen Eigenvektor $\underline{\Phi}$ zu der Eigenfrequenz bestimmen.

Eigenvektor

bekannt

$$\left[\underline{M} \cdot (-w_i^2) + \underline{K}\right] \cdot \underline{\Phi}_i = 0$$

Wichtige Aussagen:

1. Diese Eigenwertanalyse liefert verschiedene Schwingfrequenzen, für die sich das dynamische Kräftegleichgewicht erfüllen lässt. Das sind die Frequenzen, bei denen das System "gerne" schwingen würde, wenn man es nach geeigneter Anregung sich selbst überläßt. Sie spiegeln also das Eigenverhalten des dynamischen Systems unabhängig von einer konkreten Anregung wieder. Wie die echten Schwingungen aussehen, hängt dann von der konkreten Anregung ab.
2. Das obige Gleichungssystem liefert für jede Eigenkreisfrequenz $\underline{\omega}$ einen Eigenvektor $\underline{\Phi}$. Das sind die Verschiebungen der einzelnen Knoten.
3. Das obige Gleichungssystem lässt sich auch dann erfüllen, wenn der Eigenvektor mit einem beliebigen Faktor multipliziert wird. Die Verschiebungen einer Eigenform sind also nur relativ zueinander fest! Der absolute Wert der Verschiebungen hat keine Bedeutung, weil er beliebig skaliert werden könnte!
4. Aus den Verschiebungen können auch Größen wie Spannungen berechnet werden. Diese haben genauso nur relativ eine Bedeutung. Man kann also nur die Aussage treffen:
   Wird diese Eigenform angeregt, dann führt das zu Spannungskonzentrationen an den Stellen an denen eine hohe Spannung angezeigt wird.
   Der Wert der Spannungen hat keine Bedeutung!

Ergebnisinterpretation bei Modalanalysen

Vergleichbarkeit von Ergebnissen:

Da nun die einzelnen Eigenvektoren $\underline{\Phi}$ beliebig skaliert sein könnten, werden die verschiedenen Eigenvektoren eines Modells auf eine gemeinsame Basis bezogen. (Normierung)

In ANSYS und ANSYS Workbench ist die Voreinstellung eine Normierung auf die Massenmatrix. Die Eigenvektoren werden so eingestellt, dass gilt:

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_i = 1$$

Das ist dann der Eigenvektor, den man bei der Ausgabe sieht.

Die Massennormierung ist zunächst eine beliebige Normierung wie auch die Alternative in ANSYS, bei der der größte Verschiebungswert auf 1 gesetzt wird. Bei der Massennormierung wird für das bei der späteren modalen Superposition verwendete Gleichungssystem im "modalen Raum" die Diagonale der Massenmatrix auf 1 gesetzt. Die Diagonale der Steifigkeitsmatrix ist dann $\underline{\omega}^2$ und das Gleichungssystem ist zudem klein und wg. der Diagonalform der beiden Matrizen entkoppelt. Dass das massennormiert wird, ist lediglich für die Übergabe der modalen Daten von ANSYS in 3rd party software wie LMS/Falancs bzw. LMS/SYSNOISE wichtig. Bei diesen wird nämlich ebenfalls im modalen Raum gerechnet und dort muss der Programmierer dann einfach wissen in welcher Form die importierten Moden normiert wurden. Also ist das letztlich eine Konvention, die sich durchgesetzt hat. Für den ANSYS Berechner selbst ist das relativ egal.

Es ist also nicht zulässig Spannungen oder Verschiebungen zwischen Moden oder zwischen Modellen mit „ähnlicher“ Massenverteilung zu vergleichen. Erst wenn eine Anregung vorhanden ist, kann im Rahmen einer Frequenzganganalyse die "wahre" auftretende Spannung oder Amplitude bei einer Frequenz ermittelt werden. Dies geschieht dann z.B. bei der modalen Superposition indem die hier noch freien Vorfaktoren (Skalierungsfaktoren) vor den diskreten Eigenvektoren berechnet werden.

MV